

分布绕组内置式永磁同步电机电磁力分析

Study on Electromagnetic Force in Interior Permanent Magnet Synchronous Machine with distributed windings

张佳敏 姜文颖 张卓然 张震

(南京航空航天大学)

摘 要: 随着电动汽车的发展, 牵引电机的振动噪声问题受到了极大的关注。电磁力的大小不仅随空间位置变化, 还随着时间变化, 当电磁力的频率与电机本身的固有频率相近, 则会发生共振, 引起振动噪声。本文基于麦克斯韦张量法, 考虑齿槽效应及转子凸极效应, 建立了气隙磁密及电磁力的解析模型, 并利用 JMAG 有限元软件建立 48 槽 8 极内置式永磁同步电机仿真模型, 通过二维离散傅里叶分解, 得到气隙电磁力的空间分量和时间分量, 验证解析计算的一致性, 为以后的振动噪声分析打下基础。

关键词: 振动噪声; 内置式永磁同步电机; 电磁力; 分布绕组

Abstract: With the development of electric vehicles, more and more attentions have been put on understanding and attenuating the noise, vibration, and harshness (NVH) of traction machines. NVH in machines are mainly caused by the electromagnetic force, which is complex vector functions of both time and space, and models are desired for accurately evaluating its characteristics. In this paper, analytical models for estimating the air gap flux density and electromagnetic force in interior permanent magnet synchronous machine (IPMSM) with distributed windings are established. The effects of stator slots and rotor saliency are taken into consideration to ensure the validity of the model. Temporal and spatial harmonic distributions of electromagnetic force are studied separately. The electromagnetic force of a 44 kW 8-pole/48-slot IPMSM is evaluated using 2-D finite element analysis (FEA) and 2-D fast Fourier transformation (FFT) method. The simulation results agree well with that predicted from the analytical model. The relationship between mode numbers and temporal harmonics is identified. In addition, it is found that tooth harmonics and rotor harmonics have strong influences on the amplitude of electromagnetic force.

Key words: Electromagnetic noise and vibration; IPMSM; electromagnetic force; distributed winding

1. 引言

近年来, 电动汽车因为其环保越来越受到人们的重视, 永磁同步电机因功率密度高, 运行可靠等优点, 被广泛应用于电动汽车。电动汽车需要安静的乘车环境, 人耳听觉敏感的频率范围为 2-5kHz[1], 长时间处于噪声环境会影响人的听觉能力, 甚至会影响其身心健康, 因而电动汽车的振动和噪声问题日渐成为人们关注的主要问题之一。研究引起振动噪声的机理并降低振动噪声显得尤为重要。

常见的引起振动噪声的原因有 3 种: 电磁振动噪声、机械振动噪声以及空气动力噪声。其中电磁振动噪声是影响最为严重的一种, 研究表明, 影响电磁振动噪声的主要因素是电磁力[2]。电机在运行过程中, 气隙磁场包括基波磁场和一系列谐波磁场, 这些磁场的相互作用产生电磁力, 将电磁力分解, 可分解为径向力和切向力, 其中切向力用于产生切向转矩, 而随着时间的变化和空间变化的径向力作用于定子铁心上, 使得定子铁心和机座发生与径向力同频率的振动, 导致变形。当径向力的频率接近电机本身的固有频率时, 则会发生共振, 引起较大的振动及噪声。因此径向力波的时间空间谐波分析值得深入研究。

有关电磁力及振动噪声的研究, 国内外学者做了大量的工作。文献[3]指出电磁力计算路径选择气隙中心线而非靠近定子铁心那一侧更为妥当。文献[4]详细分析了 12 槽 10 极集中绕组永磁同步电机径向电磁力密度特性。文献[5]列举了几种不同极槽配合的表贴式分数槽永磁无刷电机, 对比分析

了各自的电磁力和振动模态。表贴式永磁同步电机这方面的研究较为成熟，文献也较为普遍，文献[6]则是从分数槽内置式永磁同步电机出发，分析了其电磁力密度和振动的相关特性。与此同时，也有很多研究人员专注于如何减小这方面的振动和噪声[7-12]，例如优化永磁体结构，电流注入，极槽配合等等。

本文针对分布绕组内置式永磁同步电机，基于麦克斯韦张量法，考虑齿槽效应及转子凸极效应，建立了气隙磁密及气隙电磁力密度的解析模型。同时建立了一个 48 槽 8 极内置式永磁同步电机的仿真模型，分析电磁力时间谐波和空间谐波组成，验证理论计算的一致性。结果表明齿谐波和转子谐波对电磁力谐波的分布及幅值有很大的影响。

2. 电磁力谐波分析

根据麦克斯韦张量法，径向电磁力可表示为

$$p_r = \frac{1}{2\mu_0} (B_r^2 - B_t^2) \quad (1)$$

式中： p_r 为径向电磁力， B_r 和 B_t 分别为径向以及切向气隙磁密， μ_0 为真空磁导率。

由于铁磁材料的相对磁导率远大于气隙磁导率，在气隙中，大部分磁力线沿铁磁材料近似垂直于铁磁材料和空气交界面。切向磁密远远小于径向磁密，可以忽略不计，则径向电磁力可表示为

$$p_r \approx \frac{B_r^2}{2\mu_0} \quad (2)$$

不考虑磁场饱和，径向气隙磁密表达式如下

$$B_r(\theta, t) = f(\theta, t) \cdot \Lambda(\theta, t) \quad (3)$$

式中 $f(\theta, t)$ 为磁动势， $\Lambda(\theta, t)$ 为气隙磁导率。

2.1 径向气隙磁密

对于内置式永磁同步电机，计算气隙磁导率时，将齿槽效应及转子凸极效应考虑在内，则等式可写为

$$\begin{aligned} \Lambda(\theta, t) &= \Lambda_0 \cdot \left\{ 1 + \frac{\sum \Lambda_{k_s} \cos(k_s Z_s \theta)}{\Lambda_0} \right\} \cdot \left\{ 1 + \frac{\sum \Lambda_{k_r} \cos[k_r Z_r (\theta - \frac{\omega}{p} t)]}{\Lambda_0} \right\} \\ &\approx \Lambda_0 + \sum \Lambda_{k_s} \cos(k_s Z_s \theta) + \sum \Lambda_{k_r} \cos[k_r Z_r (\theta - \frac{\omega}{p} t)] \end{aligned} \quad (4)$$

式中 Λ_0 为气隙磁导的不变部分， Z_s 为定子槽数， Z_r 为永磁体槽数，对于大部分电机， $Z_r = 2p$ 。 k_s 和 k_r 为自然数，分别代表定子槽和永磁体槽的齿谐波数， Λ_{k_s} 和 Λ_{k_r} 分别为各自齿谐波的幅值， p 为极对数， θ 为机械位置角， ω 为角频率。

永磁电机的气隙磁密由永磁体产生的磁场以及电枢绕组产生的磁场相互作用而成，故气隙磁密公式可表示为

$$f(\theta, t) = f_{PM}(\theta, t) + f_{AM}(\theta, t) \quad (5)$$

其中 $f_{PM}(\theta, t)$ 和 $f_{AM}(\theta, t)$ 分别表示永磁体磁场以及电枢绕组磁场产生的磁动势。

对应永磁体磁动势方程为

$$f_{PM}(\theta, t) = \sum_{\mu} F_{\mu} \cos(\mu \omega t - \mu p \theta - \phi_{\mu}) \quad (6)$$

式中 $\mu = 2k + 1$, k 为自然数， F_{μ} 和 ϕ_{μ} 分别表示永磁体磁动势 μ 次谐波对应的幅值和相角。

电枢绕组磁场产生的磁动势为

$$f_{AM}(\theta, t) = \sum_v F_v \cos(\omega t - \nu p \theta - \phi_v) \quad (7)$$

式中 F_v 和 ϕ_v 分别表示正弦电流源激励下定子绕组 ν 次谐波磁动势对应的幅值和相角。 $\nu = 6k+1, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 对应的正负号代表旋转方向。

根据上式(3)-(7)，气隙磁密可表示为

$$B_r(\theta, t) = (a) + (b) + (c) + (d) + (e) + (f) \quad (8)$$

其中

$$\Lambda_0 \sum F_\mu \cos(\mu \omega t - \mu p \theta - \phi_\mu) \quad (a)$$

$$\Lambda_0 \sum F_\nu \cos(\omega t - \nu p \theta - \phi_\nu) \quad (b)$$

$$\frac{1}{2} \sum \sum F_\mu \Lambda_{k_s} \cos[\mu \omega t - (\mu p \pm k_s Z_s) \theta - \phi_\mu] \quad (c)$$

$$\frac{1}{2} \sum \sum F_\nu \Lambda_{k_s} \cos[\omega t - (\nu p \pm k_s Z_s) \theta - \phi_\nu] \quad (d)$$

$$\frac{1}{2} \sum \sum F_\mu \Lambda_{k_r} \cos[(\mu \pm \frac{k_r Z_r}{p}) \omega t - (\mu p \pm k_r Z_r) \theta - \phi_\mu] \quad (e)$$

$$\frac{1}{2} \sum \sum F_\nu \Lambda_{k_r} \cos[(1 \pm \frac{k_r Z_r}{p}) \omega t - (\nu p \pm k_r Z_r) \theta - \phi_\nu] \quad (f)$$

注： $\cos[(a \pm b)\omega t - (c \pm d)\theta] = \cos[(a+b)\omega t - (c+d)\theta] + \cos[(a-b)\omega t - (c-d)\theta]$

上式表达式可写成 $B_r = \sum b \cos(h\omega t - r\theta - \phi)$ ，其中 r 代表空间谐波次数， h 代表时间谐波频率，电角速度可表示为 $\frac{d(p\theta)}{dt} = \frac{ph\omega}{r}$ 。气隙磁密分布如表 1 所示。

表 1 气隙磁密分布

	空间 谐波	时间 谐波	电角 速度	幅值
a	μp	μf	ω	$\Lambda_0 \sum F_\mu$
b	νp	f	ω/ν	$\Lambda_0 \sum F_\nu$
c	$\mu p \pm k_s Z_s$	μf	$\frac{\mu p}{\mu p \pm k_s Z_s} \omega$	$\frac{\sum \sum F_\mu \Lambda_{k_s}}{2}$
d	$\nu p \pm k_s Z_s$	f	$\frac{p}{\nu p \pm k_s Z_s} \omega$	$\frac{\sum \sum F_\nu \Lambda_{k_s}}{2}$
e	$\mu p \pm k_r Z_r$	$(\mu \pm k_r Z_r / p) f$	ω	$\frac{\sum \sum F_\mu \Lambda_{k_r}}{2}$
f	$\nu p \pm k_r Z_r$	$(1 \pm k_r Z_r / p) f$	$\frac{p \pm k_r Z_r}{\nu p \pm k_r Z_r} \omega$	$\frac{\sum \sum F_\nu \Lambda_{k_r}}{2}$

由表可见，空间谐波与极槽配比有关，除 0 次谐波，分布绕组内置式永磁同步电机最低空间谐波次数为 p ，时间谐波则与运行频率，极对数以及永磁体槽数有关。若忽略旋转方向性，由于数值上谐波次数 μ 包含 ν ，负载 (a-f) 的气隙磁密空间谐波次数与空载(a,c,e)相同，只是对应的幅值略有增加，这是因为增加的电枢反应的影响。气隙磁密时间谐波的变化规律也与此相同。对于 48 极 8 槽分布绕组内置式永磁同步电机，极对数、定子槽数、永磁体槽数的最大公约数等于极对数，即 $\text{GCD}(p, Z_s, Z_r) = p$ ，对应的空间谐波数为 $4, 12, 20, \dots kp, k=1, 3, 5, \dots$ 。

2.2 径向电磁力

根据公式(2)-(8)，径向电磁力可写为

$$p_r \approx \frac{B_r^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} [(a) + (b) + (c) + (d) + (e) + (f)]^2 \quad (9)$$

将上式展开可得 21 项，表 2 只列出了数值较大的前 17 项。由此可看出，径向电磁力密度的空间谐波与 μ, ν, p, Z_s, Z_r 相关。由于 k_s 和 k_r 均为自然数，故表格中用 k 表示 k_s 和 k_r 的加减运算关系。

表 2 径向电磁力分布

	空间谐波	时间谐波	幅值	来源
1)	$(\mu_1 \pm \mu_2)p$	$(\mu_1 \pm \mu_2)f$	$\Lambda_0^2 \sum \sum F_{\mu_1} F_{\mu_2} / 4\mu_0$	$a^2/2\mu_0$
2)	$(\mu_1 \pm \mu_2)p + kZ_s$	$(\mu_1 \pm \mu_2)f$	$\frac{\sum \sum \sum \sum F_{\mu_1} F_{\mu_2} \Lambda_{k_1} \Lambda_{k_2}}{16\mu_0}$	$c^2/2\mu_0$
		$2f$	$\frac{\Lambda_0 \sum \sum \sum F_{\mu_1} F_{\mu_2} \Lambda_{k_2}}{4\mu_0}$	ac/μ_0
		0		
3)	$(\mu_1 \pm \mu_2)p + kZ_r$	$[(\mu_1 \pm \mu_2) + \frac{kZ_r}{p}]f$	$\frac{\sum \sum \sum \sum F_{\mu_1} F_{\mu_2} \Lambda_{k_1} \Lambda_{k_2}}{16\mu_0}$	$e^2/2\mu_0$
			$\sum \sum \sum F_{\mu_1} F_{\mu_2} \Lambda_{k_2} / 4\mu_0$	ae/μ_0
4)	$(\nu_1 + \nu_2)p$	$2f$	$\Lambda_0^2 \sum \sum F_{\nu_1} F_{\nu_2} / 4\mu_0$	$b^2/2\mu_0$
	$(\nu_1 - \nu_2)p$	0		
5)	$(\nu_1 + \nu_2)p + kZ_s$	$2f$	$\frac{\sum \sum \sum \sum F_{\nu_1} F_{\nu_2} \Lambda_{k_1} \Lambda_{k_2}}{16\mu_0}$	$d^2/2\mu_0$
	$(\nu_1 - \nu_2)p + kZ_s$	0		
	$(\nu_1 + \nu_2)p + kZ_s$	$2f$	$\frac{\Lambda_0 \sum \sum \sum F_{\nu_1} F_{\nu_2} \Lambda_{k_2}}{4\mu_0}$	bd/μ_0
	$(\nu_1 - \nu_2)p + kZ_s$	0		
6)	$(\nu_1 + \nu_2)p + kZ_r$	$[2 + kZ_r/p]f$	$\frac{\sum \sum \sum \sum F_{\nu_1} F_{\nu_2} \Lambda_{k_1} \Lambda_{k_2}}{16\mu_0}$	$f^2/2\mu_0$
	$(\nu_1 - \nu_2)p + kZ_r$	$kZ_r f/p$		
	$(\nu_1 + \nu_2)p + kZ_r$	$[2 + kZ_r/p]f$	$\frac{\Lambda_0 \sum \sum \sum F_{\nu_1} F_{\nu_2} \Lambda_{k_2}}{4\mu_0}$	bf/μ_0
	$(\nu_1 - \nu_2)p + kZ_r$	$kZ_r f/p$		
7)	$(\mu \pm \nu)p$	$(\mu \pm 1)f$	$\Lambda_0^2 \sum \sum F_{\mu} F_{\nu} / 2\mu_0$	ab/μ_0
8)	$(\mu \pm \nu)p + kZ_s$	$(\mu \pm 1)f$	$\Lambda_0 \sum \sum \sum F_{\mu} F_{\nu} \Lambda_{k_2} / 4\mu_0$	ad/μ_0
			$\frac{\sum \sum \sum \sum F_{\mu} F_{\nu} \Lambda_{k_1} \Lambda_{k_2}}{8\mu_0}$	bc/μ_0
9)	$(\mu \pm \nu)p + kZ_r$	$[(\mu \pm 1) + \frac{kZ_r}{p}]f$	$\Lambda_0 \sum \sum \sum F_{\mu} F_{\nu} \Lambda_{k_2} / 4\mu_0$	af/μ_0
			$\frac{\sum \sum \sum \sum F_{\mu} F_{\nu} \Lambda_{k_1} \Lambda_{k_2}}{8\mu_0}$	be/μ_0
				ef/μ_0

式中 $\mu = 2k + 1, k = 0, 1, 2, \dots$, $\nu = 6k + 1, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

表格中 1-3 组为分布绕组内置式永磁同步电机空载径向电磁力，主要由永磁体磁场产生，1-9 组负载情况下的电磁力。我们需要集中关注电磁力的低阶模态。

3. 有限元仿真分析

本文以电动汽车普遍使用的 48 槽 8 极内置式 V 型永磁同步电机为例，对此进行气隙磁密以及电磁力的仿真分析。电机模型如图 1 所示，具体参数指标详见表 3。

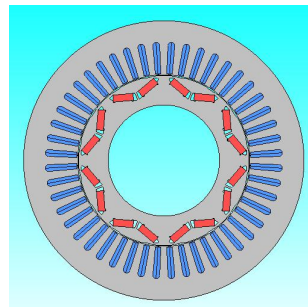


图 1 电机结构

表 3 电机参数

主要参数/单位	数值
极数/槽数	8/48
定子外径/ mm	264`
定子内径/ mm	161.93
气隙长度/ mm	0.73
铁心长度/ mm	60.7
额定功率/ kW	44

3.1 径向气隙磁密

额定状态下, 电机的转速为 2000 转/分, 转矩值为 210Nm。本次仿真均为电流源激励, 此工况下的正弦电流激励幅值为 255A, 基频为 133.33Hz。

图 2 为电机空载以及负载情况下的径向气隙磁密波形以及对应的谐波分布图。从图中看出, 负载的气隙磁密空间谐波次数与空载相同, 只是对应的幅值略有增加, 这与理论相符。

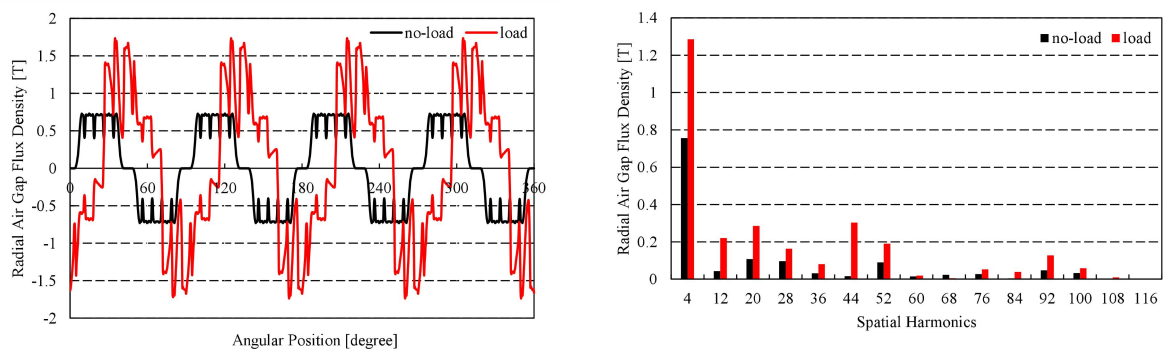


图 2 径向气隙磁密波形及对应的谐波分布 (机械角度 90 度时)

该电机, 即 $p=4$, $Z_s=48$, $Z_r=8$, 根据表 1 可得气隙磁密主要的空间谐波次数为 $4, 12, 20 \cdots pk$, $k=1, 3, 5 \cdots$, 仿真结果与理论计算结果相符。由于 $F_l > F_u (\mu > 1)$, $F_l > F_v (\nu > 1)$, 则可看出其 4 次空间谐波主要由表 1 中的 a, b 两项得出。除此以外, 根据多项式 c-f, 可得 4 次谐波还与定子绕组一阶齿谐波以及定转子 11/13 次谐波相互作用, 转子一阶齿谐波以及定转子 11/13 次谐波相互作用产生。由图 2 可知, 负载频域下出现 2 个区域频率对应的幅值呈现上升趋势, 一个集中在 44, 52 次, 另一个集中在 92, 100 次, 这是因为定子绕组一阶和二阶齿谐波的影响 (即表 1 中 $k_s=1, 2$)。因此, 电机设计中消除齿谐波的影响是非常重要的, 比如采用转子斜极, 定子斜槽等方法。

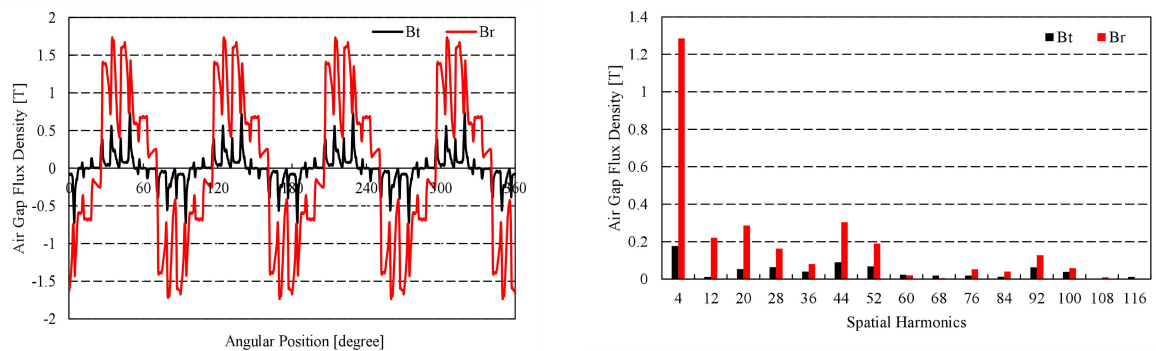


图 3 径切向气隙磁密波形及对应谐波分布对比 (额定工况下, 机械角度 90 度时)

图 3 为额定工况下对应的径向和切向气隙磁密波形图及谐波分布。由此看出, 气隙磁密的切向含量远小于径向含量, 而电磁力计算与径切向气隙磁密的平方有关, 这从数据角度也解释了理论计算

中忽略切向气隙磁密的合理性。但在实际仿真中，为了提高数据的准确性，我们将气隙磁密的切向分量也考虑在内。

3.2 电磁力

图 4 为电机空载及负载工况下的径向电磁力密度波形和谐波对比，从图中可看出，负载的径向电磁力密度空间谐波次数与空载相同，但对应的幅值大幅度提高，这与理论计算相符，空载电磁力只占表 2 的前 3 组，故从数值上相较 9 组的负载情况少很多。从表 2 可分析得，电磁力的空间谐波在空载时仅与转子谐波 μ 有关，负载时与 μ, ν, Z_s, Z_r 及相互作用均相关。

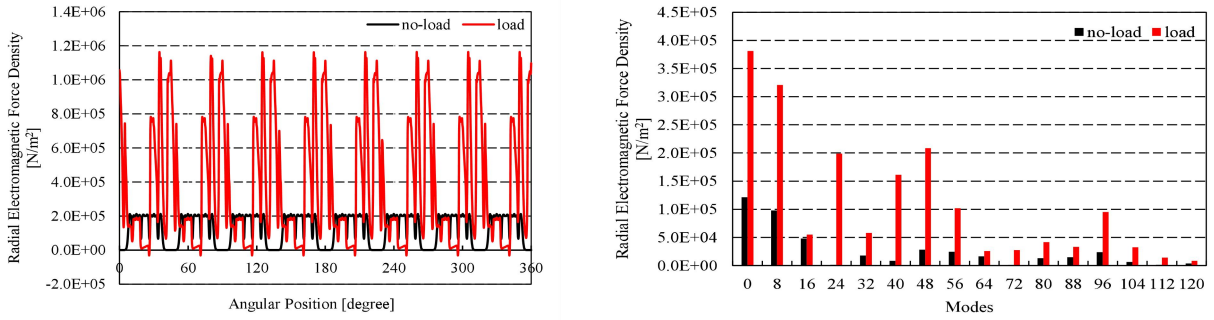


图 4 径向气隙磁密波形及对应的谐波分布对比

该电机，即 $p=4$, $Z_s=48$, $Z_r=8$ ，根据表 2 可得径向电磁力主要的空间谐波为 0, 8, 16, 24... $2pk$ 次谐波， $k=0, 1, 2, \dots$ ，仿真结果与理论计算结果相符。由于 $F_l > F_\mu$ ($\mu > l$), $F_l > F_\nu$ ($\nu > l$)，8 次空间谐波主要由表 2 中的 1, 4, 7 三组所得，第 7 组数据的幅值远大于其他组数据，表明永磁体磁场与电枢磁场相互作用对电磁力的影响很明显。图 4 的频谱图可以看出 2 个区域频率对应的幅值呈现上升趋势，一个集中在 40, 48, 56 次，另一个集中在 88, 96, 104 次，这种现象在负载时尤为明显，这是因为定子绕组一阶和二阶齿谐波的影响（即表 2 中 $k_s=1, 2$ ）。

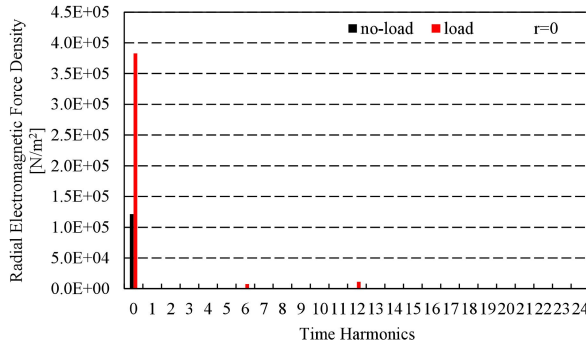


图 5 空间谐波为 0 时径向电磁力密度 FFT

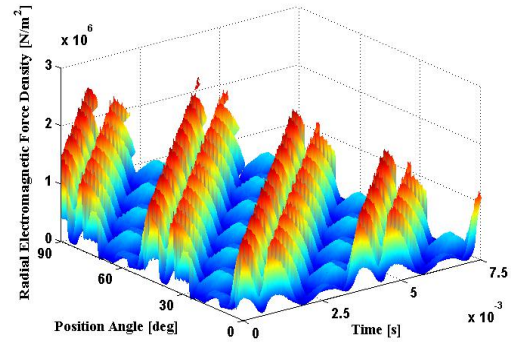


图 6 负载下径向电磁力密度

满足以下等式任意一个，即 $\mu_1 = \mu_2$, $\mu_1 \pm \mu_2 = 2k$, $\mu_1 \pm \mu_2 = 8k$, $\nu_1 = \nu_2$, $\mu = \nu$, $\nu_1 \pm \nu_2 = 2k$, $\nu_1 \pm \nu_2 = 8k$, $\mu \pm \nu = 2k$, $\mu \pm \nu = 8k$ ，则电磁力空间谐波为 0，只有其中前 3 个等式为空载情况，这也解释了为什么负载下 0 次电磁力比空载增加了 214.6%。径向力的直流分量较其他谐波在数值上差距很大，但它仅是径向力的不变部分，是在定子圆周上均匀分布的力，使得定子铁心受到压缩应力。图 5 为对应的空间 0 次径向力下对应的时间谐波分布图，从图中可看出，时间频率主要集中在 0 次，其他次谐波数值均很小，除了 6 次，其余频率与 0 次相比几乎可以忽略不计。由表 2 的 7, 8 两组公式可看出，6 次时间谐波主要与运行基频以及对应的 5 次/7 次转子谐波相互作用有关。

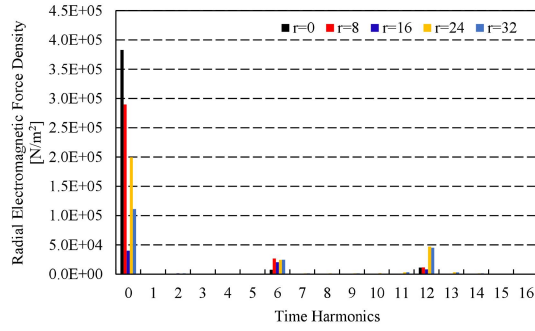


图7 负载径向电磁力密度空间谐波 FFT 分解

图6为额定工况下电机径向电磁力密度的3维波形图,它既是一个空间位置的函数,同时也是时间的函数。图7为2维傅里叶变换下各次空间谐波对应的时间谐波。由图可看出,各次空间谐波下对应的时间谐波规律基本相似,除直流分量,仍有2个区域频率对应的幅值呈现上升趋势,一个集中在6次,另一个集中在12次,这对应于转子谐波5/7次以及11/13次与基频相作用的结果。电机设计中消除转子谐波的影响是非常重要的,比如采用优化定子铁心结构等方法。

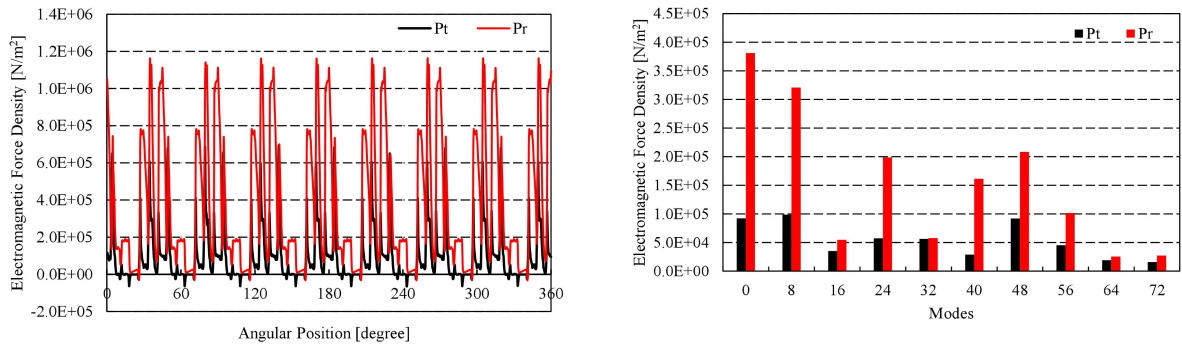


图8 径切向电磁力密度波形及空间谐波对比(额定工况,机械角度90度)

与此同时,图8对比额定工况下径向及切向电磁力密度的波形及空间谐波,由此可看出,径切向的空间谐波数完全相同,如果用同样的方法观察对应的时间谐波,则会发现时间谐波的规律也大致相同,不过数量级上切向电磁力远小于径向电磁力。由于切向电磁力乘以力臂就是转矩,这也从理论上解释了转矩的谐波成分。

4. 结语

本文从理论推导计算了分布绕组内置式永磁同步电机气隙磁密以及电磁力,分析其对应的谐波成分及产生来源,同时结合有限元仿真软件以及二维傅里叶变换的数据处理方法对理论进行了验证。具体结论如下:

1) 对于永磁同步电机,负载的气隙磁密空间谐波次数与空载相同,只是对应的幅值有增加。这个结论可延伸到永磁同步电机的电磁力上,无论是径向电磁力还是切向电磁力。

2) 对于极对数、定子槽数、永磁体槽数的最大公约数等于极对数的电机,即 $\text{GCD}(p, Z_s, Z_r) = p$, 对应的气隙磁密空间谐波数为 kp , $k=1, 3, 5, 7 \dots$, 同样,该类型下电机的电磁力空间谐波次数为 $2np$, $n=0, 1, 2, 3 \dots$, 我们需要关注低次空间谐波,他们往往对应着较大的谐波幅值。

3) 定子齿谐波及转子谐波在电磁力幅值上有很大的影响,如果不采取措施削减,其对应电机的电磁力频谱图上会出现一定范围的幅值上升趋势,这就解释了常见定子斜极,转子斜槽,优化转子铁心结构等方法对降低电磁力,减小转矩脉动的有效性。

本文仅以一个具体的8极48槽分布绕组内置式永磁同步电机为例进行分析,但本文提出的理论

分析方法及对应的仿真分析可同样应用于其他类型的内置式永磁同步电机。本文研究为以后的内置式永磁同步电机振动噪声分析打下了基础。

5 参考文献

- [1] S. A. Gelfand, *Essentials of Audiology*. New York, NY, USA: Thieme Med. Publishers, 2009.
- [2] R. Islam and I. Husain, "Analytical Model for Predicting Noise and Vibration in Permanent-Magnet Synchronous Motors," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 46, no. 6, pp. 2346-2354, Nov.-Dec. 2010.
- [3] Z. Q. Zhu, Z. P. Xia, L. J. Wu and G. W. Jewell, "Analytical Modeling and Finite-Element Computation of Radial Vibration Force in Fractional-Slot Permanent-Magnet Brushless Machines," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 46, no. 5, pp. 1908-1918, Sept.-Oct. 2010.
- [4] G. Dajaku and D. Gerling, "Magnetic radial force density of the PM machine with 12-teeth/10-poles winding topology," in *Proc. Int. Conf. Electric Machines and Drives*, Miami, 2009, pp. 1715-1720.
- [5] Z. Q. Zhu, Z. P. Xia, L. J. Wu and G. W. Jewell, "Influence of slot and pole number combination on radial force and vibration modes in fractional slot PM brushless machines having single- and double-layer windings," in *Proc. IEEE Energy Convers. Congr. Expo*, San Jose, 2009, pp. 3443-3450.
- [6] W. Fei and P. C. K. Luk, "Investigation of radial electromagnetic force density and vibration in a fractional-slot interior permanent magnet synchronous machine," in *Proc. IEEE Energy Convers. Congr. Expo*, Denver, 2013, pp. 4998-5005.
- [7] G. H. Jang and D. K. Lieu, "Vibration reduction in electric machine by interlocking of the magnets," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 29, no. 2, pp. 1423-1426, Mar 1993.
- [8] Guandong Jiao and C. D. Rahn, "Field weakening for radial force reduction in brushless permanent-magnet DC motors," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 40, no. 5, pp. 3286-3292, Sept. 2004.
- [9] S. H. Lee et al. "Optimal Design for Noise Reduction in Interior Permanent-Magnet Motor," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 45, no. 6, pp. 1954-1960, Nov.-dec. 2009.
- [10] T. Sun, J. M. Kim, G. H. Lee, J. P. Hong and M. R. Choi, "Effect of Pole and Slot Combination on Noise and Vibration in Permanent Magnet Synchronous Motor," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 47, no. 5, pp. 1038-1041, May 2011.
- [11] H. Yang and Y. Chen, "Influence of Radial Force Harmonics With Low Mode Number on Electromagnetic Vibration of PMSM," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 29, no. 1, pp. 38-45, Mar 2014.
- [12] A. K. Putri, S. Rick, D. Franck and K. Hameyer, "Application of Sinusoidal Field Pole in a Permanent-Magnet Synchronous Machine to Improve the NVH Behavior Considering the MTPA and MTPV Operation Area," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 52, no. 3, pp. 2280-2288, May-June 2016.